



## Constantes d'Erdős-Turán

Joël Rivat, Gérald Tenenbaum

### ► To cite this version:

Joël Rivat, Gérald Tenenbaum. Constantes d'Erdős-Turán. Ramanujan Journal (The), 2005, 9, pp.111-121. hal-00091167

**HAL Id: hal-00091167**

**<https://hal.science/hal-00091167>**

Submitted on 5 Sep 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Constantes d’Erdős–Turán

J. Rivat & G. Tenenbaum

*À Jean-Louis Nicolas, avec toute notre amitié*

**Résumé.** L’inégalité d’Erdős–Turán mesure l’écart à l’équirépartition d’une suite quelconque du tore en fonction d’un paramètre arbitraire et de deux constantes absolues,  $c_1$  et  $c_2$ . Nous montrons que  $c_1 \geq 1$  et  $c_2 \geq 2/\pi$ , et nous fournissons un ensemble de couples admissibles  $(c_1; c_2)$  numériquement proches de l’optimum hypothétique  $(1; 2/\pi)$ , notamment  $(1; 0,653)$  et  $(1,1435; 2/\pi)$ .

The Erdős–Turán inequality measures the distance from uniform distribution of any given sequence on the torus as a function of an arbitrary parameter and two constants,  $c_1$  and  $c_2$ . We show that  $c_1 \geq 1$  and  $c_2 \geq 2/\pi$ , and we provide a set of admissible pairs  $(c_1; c_2)$  that are numerically close to the hypothetical optimum  $(1; 2/\pi)$ , including  $(1; 0.653)$  and  $(1.1435; 2/\pi)$ .

**2000 Mathematics Subject Classification :**  
Primary 11K38, 11K06 ; secondary 11L03, 42A05.

### 1. Introduction

La théorie de l’équirépartition sur le tore  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  est qualitativement sous-tendue par le critère d’Hermann Weyl (1916), qui énonce, avec la notation traditionnelle  $e(u) := \exp(2i\pi u)$  ( $u \in \mathbb{R}$ ), qu’une suite réelle  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  est équirépartie modulo 1 si, et seulement si, les moyennes d’exponentielles

$$\sigma_N(h) := \frac{1}{N} \sum_{1 \leq n \leq N} e(hx_n)$$

tendent vers 0, pour tout entier  $h$  non nul fixé, lorsque  $N \rightarrow \infty$ .

Une mesure effective de la tendance à l’équirépartition modulo 1 d’une suite  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  est reflétée par le comportement asymptotique de la discrédance

$$(1.1) \quad D_N := D_N(x_1, \dots, x_N) = \sup_I \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{I+\mathbb{Z}}(x_n) - |I| \right| \quad (N \geq 1)$$

où la borne supérieure porte sur l’ensemble des intervalles réels  $I$  de longueur  $|I| < 1$ . En 1948, Erdős et Turán [1] ont donné une version quantitative du critère de Weyl sous la forme d’une inégalité universelle

$$(1.2) \quad D_N \leq \frac{c_1}{H+1} + c_2 \sum_{1 \leq h \leq H} \frac{|\sigma_N(h)|}{h}$$

où  $H$  est un entier positif arbitraire, et  $c_1$  et  $c_2$  sont des constantes absolues convenables.

Des valeurs admissibles du couple  $(c_1; c_2)$  ont été consécutivement précisées dans la littérature. Dans [2], Kuipers et Niederreiter ont obtenu  $(c_1; c_2) = (6; 4/\pi)$ ; ce résultat a ensuite été amélioré, notamment par Montgomery [4], qui donne  $(c_1; c_2) = (1; 3)$ , et, plus récemment, par Mauduit, Rivat et Sárközy [3], qui établissent que l'on peut choisir  $(c_1; c_2) = (1; 1)$ .

Nous nous proposons dans ce travail d'aborder la question naturelle du choix optimal de  $(c_1; c_2)$ . Commençons par une minoration.

**Théorème 1.1.** *Soit  $(c_1; c_2)$  un couple de constantes satisfaisant à (1.2). Alors  $c_1 \geq 1$  et  $c_2 \geq 2/\pi$ .*

Le résultat suivant montre que chacune des deux valeurs limites peut être atteinte séparément. La question de savoir si elles peuvent l'être simultanément, autrement dit si  $(c_1; c_2) = (1; 2/\pi)$  est un choix admissible, reste ouverte.

Posons

$$\varphi(t) := \pi t(1-t) \cot \pi t + t \quad (0 \leq t \leq 1).$$

On peut établir facilement que  $\varphi$  décroît de 1 à 0 sur  $[0, 1]$ . Nous notons encore

$$\kappa(t) := t(1-t), \quad \gamma(t) := \sqrt{\varphi(t)^2 + \pi^2 \kappa(t)^2} \quad (0 \leq t \leq 1),$$

$$\gamma^* := \sup_{0 \leq t \leq 1} \gamma(t) \approx 1,0251.$$

et

$$(1.3) \quad \vartheta_y(t) := \gamma(t) \{1 - 3y^2 + 3y^2 |\cos(\pi t/3y)|\} \quad (0 \leq y \leq 1/\sqrt{3}, 0 \leq t \leq 1).$$

Nous désignons par  $y_0$  la borne inférieure de l'ensemble des  $y \in [0, 1/\sqrt{3}]$  tels que  $\sup_{0 \leq t \leq 1} \vartheta_y(t) \leq 1$ . On peut montrer numériquement que  $0,14348 < y_0 < 0,14349$ .

**Théorème 1.2.** *Pour tout  $y \in [0, y_0]$ , l'inégalité (1.2) est satisfaite avec*

$$(c_1; c_2) = \left(1 + y; \frac{2}{\pi} \{1 + (\gamma^* - 1)(1 - y/y_0)\}\right).$$

En choisissant  $y = 0$  et  $y = y_0$ , nous déduisons immédiatement de cet énoncé le résultat suivant.

**Corollaire 1.3.** *L'inégalité (1.2) est satisfaite avec  $(c_1; c_2) = (1; 2\gamma^*/\pi)$  et avec  $(c_1; c_2) = (1 + y_0; 2/\pi)$ .*

Nous notons les valeurs numériques

$$2/\pi \approx 0,636619, \quad 2\gamma^*/\pi \leq 0,6528 < 2/3, \quad y_0 \leq \frac{32}{223} \approx 0,14349.$$

## 2. Preuve du Théorème 1.1

Montrons d'abord que  $c_1 \geq 1$  indépendamment de la valeur de  $c_2$ . À cette fin, considérons, pour  $N \geq 2$ , le choix  $x_n = n/N$  ( $1 \leq n \leq N$ ). Nous avons alors

$$\sigma_N(h) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e(hn/N) = 0 \quad (1 \leq h < N).$$

De plus, puisque l'intervalle  $I = ]0, 1/N[$  ne contient aucun  $x_n$ , nous obtenons certainement

$$D_N \geq 1/N.$$

Il s'ensuit que pour tout entier  $H$ ,  $1 \leq H \leq N-1$ ,

$$\frac{1}{N} \leq D_N \leq \frac{c_1}{H+1} + c_2 \sum_{h=1}^H \frac{|\sigma_N(h)|}{h} = \frac{c_1}{H+1}.$$

Le résultat annoncé en découle en choisissant  $H = N-1$ .

Pour montrer que  $c_2 \geq 2/\pi$  indépendamment de la valeur de  $c_1$ , nous choisissons  $x_n = n/2N$  ( $N \geq 2$ ,  $1 \leq n \leq N$ ). L'intervalle  $I = ]1/2, 1[$  ne contient aucun  $x_n$ , donc

$$D_N \geq \frac{1}{2}.$$

Il s'ensuit, pour  $1 \leq H < 2N$ ,

$$\frac{1}{2} \leq \frac{c_1}{H+1} + c_2 \sum_{h=1}^H \frac{|\sigma_N(h)|}{h} = \frac{c_1}{H+1} + \frac{c_2}{N} \sum_{h=1}^H \frac{1}{h} \left| \frac{\sin(\pi h/2)}{\sin(\pi h/2N)} \right|$$

Dans la dernière somme, seuls les entiers  $h$  impairs produisent une contribution non nulle. Par passage à la limite lorsque  $N$  tend vers l'infini, il vient

$$\frac{1}{2} \leq \frac{c_1}{H+1} + \frac{2c_2}{\pi} \sum_{0 \leq k \leq (H-1)/2} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

En faisant à présent tendre  $H$  vers l'infini, nous obtenons

$$\frac{1}{2} \leq \frac{2c_2}{\pi} \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi c_2}{4}$$

et donc  $c_2 \geq 2/\pi$ . □

### 3. Preuve du Théorème 1.2

#### 3.1. Application d'un théorème de Vaaler

Nous commençons par établir un résultat intermédiaire qui est une conséquence relativement simple du travail fondamental de Vaaler [5].

**Lemme 3.1.** *Pour tous  $H \geq 1$ ,  $\lambda \geq 0$ , on a*

$$(3.1) \quad D_N \leq \frac{1+\lambda}{H+1} + \frac{2}{\pi} \sum_{1 \leq h \leq H} |\gamma(t_h) \cos(\pi \lambda t_h)| \frac{|\sigma_N(h)|}{h},$$

où l'on a posé  $t_h := h/(H+1)$ .

*Remarque.* Le cas  $\lambda = 0$  de (3.1) fournit une forme pondérée intéressante de l'inégalité d'Erdős–Turán. Comme l'atteste la courbe de  $\gamma(t)$  présentée à la Figure 1, les termes  $|\sigma_N(h)|/h$  sont affectés d'un poids sensiblement inférieur à  $2/\pi$  lorsque, disons,  $h > H/2$ . Il est peut-être possible d'exploiter cette propriété pour établir que  $(c_1; c_2) = (1; 2/\pi)$  est admissible.

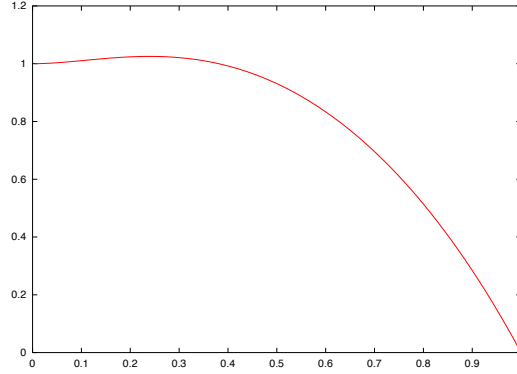


Figure 1. —  $t \mapsto \gamma(t)$ .

*Démonstration.* Nous pouvons supposer sans perte de généralité que  $\lambda \leq \frac{1}{2}(H+1)$  : le résultat est trivialement vérifié lorsque  $\lambda \geq H$ , et il découle de (3.1) appliqué à  $\lambda' := H+1-\lambda$  lorsque  $\frac{1}{2}(H+1) < \lambda < H$ .

Soit

$$f(x) := \sum_{h \in \mathbb{Z}} a_h e(hx)$$

une fonction réelle, équilibrée, à variation bornée sur le tore  $\mathbb{T} := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . D'après le théorème 19 de [5], nous avons

$$(3.2) \quad |f(x) - f * j_H(x)| \leq \frac{(dV_f) * k_H(x)}{2H+2} \quad (x \in \mathbb{T})$$

avec

$$j_H(x) := \sum_{|h| \leq H} \varphi(t_{|h|}) e(hx),$$

$$k_H(x) := \sum_{|h| \leq H} (1 - t_{|h|}) e(hx) = (H+1) \left( \frac{\sin(\pi(H+1)x)}{(H+1) \sin \pi x} \right)^2,$$

et où  $V_f(x)$  désigne la variation totale de  $f$  sur  $] -\frac{1}{2}, x]$ .

Nous pourrions appliquer directement (3.2) à la fonction équilibrée la plus proche de l'indicatrice  $\mathbf{1}_{I+\mathbb{Z}}$  apparaissant dans la définition (1.1). Cependant, nous gagnons de la précision<sup>(1)</sup> en remarquant que, quitte à remplacer  $x_n$  par  $x_n - \frac{1}{2}(\min I + \max I)$ , ce qui n'altère pas la valeur de  $|\sigma_N(h)|$ , nous pouvons nous limiter aux intervalles symétriques par rapport à l'origine. Un argument évident de continuité permet alors de restreindre l'étude aux fonctions  $\chi_\alpha$  définies sur  $\mathbb{T}$ , pour  $\alpha \in ]0, 1[$ , par la formule

$$\chi_\alpha(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < \frac{1}{2}\alpha \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = \pm \frac{1}{2}\alpha, \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2}\alpha < |x| \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

La fonction  $\chi_\alpha$  est à variation bornée sur  $\mathbb{T}$ , intégrable sur  $\mathbb{T}$ , équilibrée, donc

$$\chi_\alpha(x) = \sum_{h \in \mathbb{Z}} \frac{\sin(\pi \alpha h)}{\pi h} e(hx).$$

Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction à variation bornée, équilibrée, paire, positive ou nulle, d'intégrale 1, à support dans  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ . La transformée de Fourier de  $g$  est donnée par la formule

$$\widehat{g}(t) := \int_{-1/2}^{1/2} g(x) e(-xt) dx.$$

Pour  $\varepsilon \in ]0, 1[$ , nous définissons sur  $\mathbb{T}$  une fonction  $g_\varepsilon$  en posant

$$g_\varepsilon(x) := (1/\varepsilon) g(x/\varepsilon) \quad \left(-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}\right).$$

La fonction  $g_\varepsilon$  est à variation bornée sur  $\mathbb{T}$ , intégrable sur  $\mathbb{T}$ , et équilibrée, donc

$$(3.3) \quad g_\varepsilon(x) = \sum_{h \in \mathbb{Z}} \widehat{g}(\varepsilon h) e(hx).$$

Pour  $\alpha, \varepsilon \in ]0, 1[$ , nous considérons la fonction  $\chi_{\alpha, \varepsilon}$ , convolution sur  $\mathbb{T}$  de  $g_\varepsilon$  et  $\chi_\alpha$  :

$$\chi_{\alpha, \varepsilon}(x) := g_\varepsilon * \chi_\alpha(x) = \int_{\mathbb{T}} g_\varepsilon(u) \chi_\alpha(x-u) du = \int_{\mathbb{T}} g_\varepsilon(x-u) \chi_\alpha(u) du.$$

---

1. Voir le corollaire 5.1 de [2].

La fonction  $\chi_{\alpha,\varepsilon}$  est à variation bornée sur  $\mathbb{T}$  et équilibrée. On a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} \chi_{\alpha,\varepsilon}(t) dt &= \int_{\mathbb{T}} \chi_{\alpha}(t) dt = \alpha, \\ \chi_{\alpha,\varepsilon}(x) &= \sum_{h \in \mathbb{Z}} \frac{\sin(\pi \alpha h)}{\pi h} \widehat{g}(\varepsilon h) e(hx), \end{aligned}$$

et, par différentiation terme à terme en tenant compte de (3.3),

$$d\chi_{\alpha,\varepsilon}(x) = \{g_{\varepsilon}(x + \tfrac{1}{2}\alpha) - g_{\varepsilon}(x - \tfrac{1}{2}\alpha)\} dx,$$

d'où

$$dV_{\chi_{\alpha,\varepsilon}}(x) = |d\chi_{\alpha,\varepsilon}(x)| = |g_{\varepsilon}(x + \tfrac{1}{2}\alpha) - g_{\varepsilon}(x - \tfrac{1}{2}\alpha)| dx.$$

Enfin,

$$\begin{aligned} |g_{\varepsilon}(x + \tfrac{1}{2}\alpha) - g_{\varepsilon}(x - \tfrac{1}{2}\alpha)| &\leq g_{\varepsilon}(x + \tfrac{1}{2}\alpha) + g_{\varepsilon}(x - \tfrac{1}{2}\alpha) \\ &= 2 \sum_{h \in \mathbb{Z}} \widehat{g}(\varepsilon h) \cos(\pi \alpha h) e(hx). \end{aligned}$$

On en déduit par (3.2) que pour  $\alpha, \varepsilon \in ]0, 1[$ ,

$$|\chi_{\alpha,\varepsilon}(x) - v_H(x; \alpha, \varepsilon)| \leq r_H(x; \alpha, \varepsilon)$$

avec

$$\begin{aligned} v_H(x; \alpha, \varepsilon) &:= \sum_{|h| \leq H} \varphi(t_{|h|}) \frac{\sin(\pi \alpha h)}{\pi h} \widehat{g}(\varepsilon h) e(hx), \\ r_H(x; \alpha, \varepsilon) &:= \frac{1}{H+1} + \sum_{1 \leq |h| \leq H} \kappa(t_{|h|}) \frac{\cos(\pi \alpha h)}{|h|} \widehat{g}(\varepsilon h) e(hx). \end{aligned}$$

À ce stade, nous observons que l'on a  $\chi_{\alpha} \leq \chi_{\alpha+\varepsilon,\varepsilon}$  pour tous  $\alpha, \varepsilon \in ]0, 1[$  tels que  $0 < \alpha + \varepsilon < 1$ . En effet, il est facile de vérifier que

$$\chi_{\alpha+\varepsilon,\varepsilon}(x) = \int_{-1/2}^{1/2} g(z) \chi_{\alpha+\varepsilon}(x - \varepsilon z) dz$$

vaut 1 si  $|x| \leq \alpha/2$ .

On en déduit, pour  $\alpha \in ]0, \frac{1}{2}]$ ,  $\varepsilon \in ]0, \frac{1}{2}[$ ,

$$(3.4) \quad \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} \chi_{\alpha}(x_n) - \alpha \leq \varepsilon + \frac{1}{H+1} + \frac{2}{\pi} \sum_{1 \leq h \leq H} |\widehat{g}(\varepsilon h)| \gamma(t_h) \frac{|\sigma_N(h)|}{h}.$$

Pour  $0 < \varepsilon < \alpha \leq \frac{1}{2}$ , nous avons  $\chi_{\alpha-\varepsilon,\varepsilon} \leq \chi_{\alpha}$  et nous obtenons similairement

$$\alpha - \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} \chi_{\alpha}(x_n) \leq \varepsilon + \frac{1}{H+1} + \frac{2}{\pi} \sum_{1 \leq h \leq H} |\widehat{g}(\varepsilon h)| \gamma(t_h) \frac{|\sigma_N(h)|}{h}.$$

Cette dernière inégalité est encore trivialement vérifiée lorsque  $\alpha \leq \varepsilon < \frac{1}{2}$ . Ainsi en écrivant  $\varepsilon := \lambda/(H+1)$ , donc  $\varepsilon h = \lambda t_h$ , nous obtenons (par continuité en  $\lambda = 0$  et en  $\lambda = \frac{1}{2}(H+1)$ ), pour  $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}(H+1)$ ,

$$(3.5) \quad \left| \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} \chi_\alpha(x_n) - \alpha \right| \leq \frac{1+\lambda}{H+1} + \frac{2}{\pi} \sum_{1 \leq h \leq H} |\widehat{g}(\lambda t_h)| \gamma(t_h) \frac{|\sigma_N(h)|}{h}.$$

Le membre de droite ne dépend pas de  $\alpha$ . On obtient le résultat annoncé en faisant tendre la mesure  $g \, dx$  vers  $\frac{1}{2}\{\delta_{-1/2} + \delta_{1/2}\}$ .  $\square$

### 3.2. Remarques

Posons

$$\varrho(\lambda; g) := \sup_{0 \leq t \leq 1} |\widehat{g}(\lambda t)| \gamma(t).$$

Il découle trivialement de (3.5) que, pour tout  $0 \leq \lambda \leq 1$ , le couple

$$(c_1; c_2) = (1 + \lambda; 2\varrho(\lambda; g)/\pi)$$

est admissible dans (1.2). On a toujours  $\varrho(\lambda; g) \geq 1$ . Soit  $\lambda^*(g)$  la borne inférieure de l'ensemble des nombres réels  $\lambda$  tels que  $\varrho(\lambda; g) = 1$ . Le choix limite effectué à la fin de la démonstration précédente pour la fonction  $g$  est justifié par le fait que l'on a  $\lambda^*(g) \geq 1/\sqrt{3}$  pour toute fonction  $g$  alors que  $\lambda^*(g)$  tend vers  $1/\sqrt{3}$  lorsque  $g \, dx$  tend vers  $\frac{1}{2}\{\delta_{-1/2} + \delta_{1/2}\}$ .

Pour établir cela, nous observons d'une part que

$$\gamma(t) = 1 + \frac{1}{6}\pi^2 t^2 - \frac{2}{3}\pi^2 t^3 + O(t^4),$$

et d'autre part que

$$\widehat{g}(t) = 1 - a(g)t^2 + O(t^4)$$

avec

$$0 \leq a(g) = -\frac{1}{2}\widehat{g}''(0) = 2\pi^2 \int_{-1/2}^{1/2} x^2 g(x) \, dx \leq \frac{1}{2}\pi^2.$$

Cela implique que  $\lambda^*(g) \geq \pi/\sqrt{6a(g)} > 1/\sqrt{3}$  pour toute fonction  $g$ , le minimum étant atteint asymptotiquement lorsque  $a(g)$  tend vers  $\frac{1}{2}\pi^2$ , ce qui détermine la mesure limite.

Il est à noter que, pour le choix naturel  $g = 1$ , on a

$$\widehat{g}(t) = \sin(\pi t)/\pi t = 1 - \frac{1}{6}\pi^2 t^2 + O(t^4)$$

d'où  $\lambda^*(1) \geq 1$ .

Posons  $\varrho(\lambda) := \sup_{0 \leq t \leq 1} |\gamma(t) \cos(\pi \lambda t)|$ . On a

$$\varrho(0) \approx 1,0251, \quad \varrho(\tfrac{1}{8}) \approx 1,0210, \quad \varrho(\tfrac{1}{4}) \approx 1,0117, \quad \varrho(\tfrac{1}{3}) \approx 1,0059, \quad \varrho(1/\sqrt{3}) = 1.$$



### 3.3. Preuve du Théorème 1.2

Nous observons d'emblée que le résultat énoncé découle trivialement, par interpolation linéaire, des cas  $y = 0$  et  $y = y_0$ . Comme le premier est une conséquence triviale de (3.1), il suffit de considérer le second.

Posons  $\gamma_\lambda(t) := |\cos(\pi\lambda t)|\gamma(t)$  et notons que, lorsque  $t \rightarrow 0$ ,

$$(3.6) \quad \gamma_\lambda(t) = 1 + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\lambda^2\right)\pi^2 t^2 - \frac{2}{3}\pi^2 t^3 + O_\lambda(t^4).$$

Soient  $L > 0$  et  $\mu$  une mesure de probabilité sur  $[0, L]$ . Il résulte immédiatement de (3.1) que l'inégalité d'Erdős–Turán (1.2) a lieu avec les constantes

$$c_1 = \int_0^L (1 + \lambda) d\mu(\lambda), \quad c_2 = \frac{2}{\pi} \sup_{0 \leq t \leq 1} \int_0^L |\gamma_\lambda(t)| d\mu(\lambda).$$

Or on a, en vertu de (3.6), lorsque  $t \rightarrow 0$ ,

$$\int_0^L |\gamma_\lambda(t)| d\mu(\lambda) = 1 + \frac{1}{2}\pi^2 t^2 \left\{ \frac{1}{3} - \int_0^L \lambda^2 d\mu(\lambda) \right\} + O(t^3).$$

Pour tout choix de  $\mu$  tel que  $c_2 = 2/\pi$ , on a donc nécessairement

$$L \int_0^L \lambda d\mu(\lambda) \geq \int_0^L \lambda^2 d\mu(\lambda) \geq \frac{1}{3},$$

d'où

$$c_1 = 1 + \int_0^L \lambda d\mu(\lambda) \geq 1 + \frac{1}{L} \int_0^L \lambda^2 d\mu(\lambda) \geq 1 + \frac{1}{3L}.$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que les deux dernières inégalités soient des égalités est que  $\mu = a\delta_0 + b\delta_L$  avec  $a = 1 - 1/3L^2$ ,  $b = 1/3L^2$ ,  $L \geq 1/\sqrt{3}$ , où  $\delta_u$  désigne la mesure de Dirac au point  $u$ .

Posons  $L := 1/3y$ , où  $y$  est un paramètre arbitrairement choisi dans l'intervalle  $[0, 1/\sqrt{3}]$ , et rappelons la définition (1.3). Il résulte de (3.1) que l'on a, pour tous  $N \geq 1$ ,  $H \geq 1$  et toute suite  $\{x_n\}_{n=1}^N$ ,

$$D_N \leq \frac{1+y}{H+1} + \frac{2}{\pi} \sum_{1 \leq n \leq N} \vartheta_y(t_h) \frac{|\sigma_N(h)|}{h}.$$

De plus, la discussion précédente montre que  $\vartheta_y$  est la seule combinaison linéaire des fonctions  $\gamma_\lambda$  satisfaisant aux conditions nécessaires issues du comportement à l'origine pour que

$$(3.7) \quad \sup_{0 \leq t \leq 1} \vartheta_y(t) = 1,$$

et donc  $c_2 = 2/\pi$ . On a en effet, lorsque  $t \rightarrow 0$ ,

$$\vartheta_y(t) = 1 - \frac{2}{3}\pi^2 t^3 + O_y(t^4).$$

Il reste à déterminer la plus petite valeur  $y_0$  de  $y$  pour laquelle (3.7) est réalisée, ou, à défaut, une approximation acceptable de cette valeur minimale. L'observation numérique

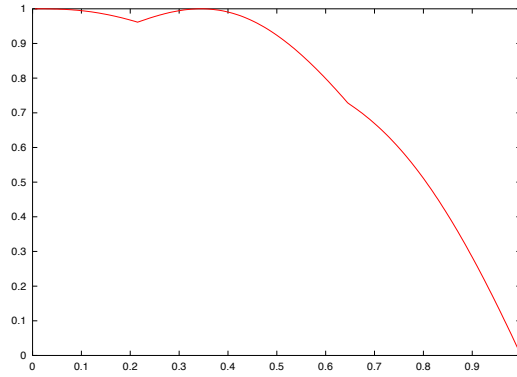


Figure 2. —  $t \mapsto \vartheta_{32/223}(t)$ .

suggère que  $y_0 \leq \frac{32}{223}$  et nous pouvons effectivement justifier cette assertion par la technique décrite au paragraphe 4.

*Remarque.* Il est à noter que la méthode employée ne peut fournir simultanément  $c_1 = 1$  et  $c_2 = 2/\pi$ . En effet, si  $c_1$  tend vers 1,  $\int_0^L \lambda d\mu(\lambda)$  tend vers 0, donc pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $\int_0^\varepsilon d\mu(\lambda)$  tend vers 1. Cela implique

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \gamma(t) \int_0^\varepsilon |\cos(\pi \lambda t)| d\mu(\lambda) \geq \sup_{0 \leq t \leq 1} \gamma(t) |\cos(\pi \varepsilon)| \mu([0, \varepsilon]) > 1.$$

#### 4. Calculs numériques

Si  $f$  est continûment dérivable sur  $[0, 1]$ , et  $|f'(x)| \leq M$  sur  $[0, 1]$ , on a, pour toute subdivision  $t_0 = 0, t_1, \dots, t_k = 1$  de pas  $\delta$ ,

$$f(t) \leq f(t_j) + M\delta \quad (|t - t_j| \leq \delta).$$

En choisissant, par exemple,  $\delta = 1/(10^6 M)$ , nous pouvons évaluer la borne supérieure de  $f$  avec une précision de l'ordre de  $10^{-6}$ , en ne calculant qu'un nombre fini et raisonnable de valeurs numériques. Pour montrer que  $f(t) \leq 1$  pour tout  $t$ , il suffit ainsi de vérifier que  $f(t_j) \leq 1 - 10^{-6}$  pour tout  $j$  de  $[0, k]$ .

Cette technique peut, le cas échéant, être complétée par une étude locale de type développement limité avec majoration explicite du reste au voisinage des racines de l'équation  $f(t) = 1$ . Comme il n'y a pas d'accumulation des erreurs, même une valeur relativement grossière de  $M$  est suffisante.

Pour les fonctions étudiées dans cet article, la valeur de  $M$  dépend essentiellement de l'encadrement suivant, qui est d'un intérêt indépendant.

**Lemme 4.1.** *On a*

$$1 - \pi^2/4 = \varphi'(\frac{1}{2}) \leq \varphi'(t) \leq 0, \quad (0 \leq t \leq 1).$$

*Démonstration.* D'après la formule d'Euler pour la cotangente, on a

$$\varphi(t) = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{2t^2(1-t)}{t^2 - n^2} = -2t + 3 - \frac{2}{(t+1)} + \sum_{n \geq 2} \left\{ 2(1-t) + \frac{n(n-1)}{n-t} - \frac{n(n+1)}{n+t} \right\}.$$

On en déduit successivement

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= -2 + \frac{2}{(t+1)^2} + \sum_{n \geq 2} \left\{ -2 + \frac{n(n-1)}{(n-t)^2} + \frac{n(n+1)}{(n+t)^2} \right\}, \\ \varphi''(t) &= \frac{-4}{(t+1)^3} + 2 \sum_{n \geq 2} \left\{ \frac{n(n-1)}{(n-t)^3} - \frac{n(n+1)}{(n+t)^3} \right\}, \\ \varphi'''(t) &= \frac{12}{(t+1)^4} + 6 \sum_{n \geq 2} \left\{ \frac{n(n-1)}{(n-t)^4} + \frac{n(n+1)}{(n+t)^4} \right\}. \end{aligned}$$

Ainsi,  $\varphi'''(t) > 0$ , donc  $\varphi''$  est croissante sur  $[0, 1]$ . Or, pour  $t = \frac{1}{2}$ , la série de  $\varphi''$  est télescopique, d'où

$$\varphi''(\frac{1}{2}) = \frac{-32}{27} + \frac{4}{(3/2)^3} = 0.$$

Cela montre que  $\varphi'$  atteint bien son minimum en  $t = \frac{1}{2}$ . □

## Bibliographie

- [1] P. Erdős and P. Turán, On a problem in the theory of uniform distribution I, II, *Indag. Math.* **10** (1948), pp. 370–378 ; *ibid.* 406–413.
- [2] L. Kuipers and H. Niederreiter, *Uniform distribution of sequences*, Wiley-Interscience, 1974.
- [3] C. Mauduit, J. Rivat, & A. Sárközy, On the pseudorandom properties of  $n^c$ , *Illinois J. Math.* **46** (2002), no. 1, 185–197.
- [4] H. L. Montgomery, *Ten lectures on the interface between analytic number theory and harmonic analysis*, CBMS regional conferences series in mathematics, no. 84, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island (1994), 220 pp.
- [5] J. Vaaler, Some extremal functions in Fourier analysis, *Bull. Amer. Math. Soc.* **12** (1985), pp. 183–216.

Institut Élie Cartan  
Université Henri Poincaré–Nancy 1  
BP 239  
54506 Vandœuvre Cedex  
France  
`rivat@iecn.u-nancy.fr`  
Gérald Tenenbaum

Institut Élie Cartan  
Université Henri Poincaré–Nancy 1  
BP 239  
54506 Vandœuvre Cedex  
France  
`tenenb@ciril.fr`